



اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهنامه برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از ماهنامه، ۱۰ مسئله جدید مطرح می‌شود که همه خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماهنامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد. مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماهنامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طبقه دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماهنامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

بخش اول:
مسئله‌ها

۳۵۵. مجموع پنج توان متوالی از ۲ از ۱۳۹۷ بیشتر است. اولین جمله بین آن‌ها کدام است؟

۳۵۶. کوچک‌ترین عدد صحیح x را بیابید، به طوری که $x^2 - 3 \cdot x - 175 = 0$ عددی اول باشد.

۳۵۷. مجموع تمام ریشه‌های حقیقی معادله $x^6 - 6x^4 + 11x^2 - 6 = 0$ را به دست آورید.

۳۵۸. اگر عدد ۱۳۹۷ را در مبنای n بنویسیم، به صورت 1070 نمایش داده می‌شود. n چقدر است؟

۳۵۹. جواب‌های معادله $x^4 + (x+2)^4 = 82$ را به دست آورید.

۳۶۰. اگر $f(2) = 5$ و برای هر عدد حقیقی x داشته باشیم: $f(x) \cdot f(x+1) = 3$ ، $f(10)$ مطلوب است مقدار

۳۵۱. کوچک‌ترین مقدار x را بیابید، به طوری که: $[x] + [2x] + [3x] + [4x] = 15$

۳۵۲. میانگین n عدد صحیح متوالی که از n شروع می‌شوند برابر ۹۴ است. مطلوب است مقدار n .

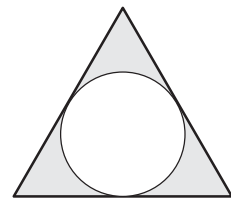
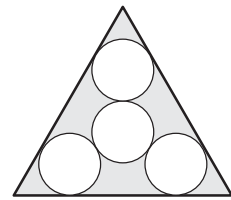
۳۵۳. اندازه زاویه‌های یک پنج‌ضلعی محدب عددهای صحیح هستند و یک دنباله حسابی تشکیل می‌دهند. چند مقدار متفاوت برای اندازه زاویه‌ها وجود دارد؟

۳۵۴. فاصله دو نقطه تقاطع منحنی‌های $x+y=7$ و $x^2+y=7$ را به دست آورید.

بخش دوم: راه‌حل‌ها

۳۲۱. در شکل ۱ دو مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع برابر مفروض‌اند. در مثلث اول ناحیه خارج دایره محاطی رنگ شده است و در شکل دوم ناحیه خارج از چهار دایره یکسان که مطابق شکل برهم مماس هستند. کدام یک از دو ناحیه رنگی بزرگ‌تر است؟

مطابق شکل چهار مثلث کوچک‌تر با مثلث اصلی متشابه هستند. در نتیجه مساحت رنگ شده در هر مثلث کوچک‌تر برابر یک‌چهارم مساحت رنگی مثلث اصلی است. در نتیجه مساحت رنگی دو شکل داده شده برابرند.



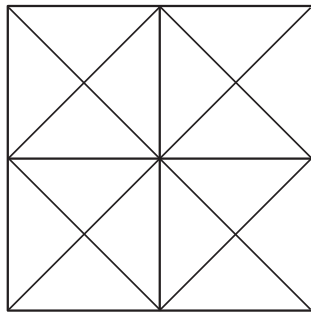
شکل ۱

۳۲۲. در شکل زیر به جای مربع‌ها می‌توانیم علامت + یا - بگذاریم، اما حداکثر از سه علامت - می‌توانیم استفاده کنیم. چند راه برای پر کردن خانه‌ها وجود دارد؟

$$۱ \square ۲ \square ۳ \square ۴ \square ۵ \square ۶ \square ۷ \square ۸ \square ۹ \square ۱۰ = ۳۵$$

مجموع عددهای ۱ تا ۱۰ برابر است با ۵۵. در نتیجه مجموع عددهایی که کم می‌شوند باید برابر ۱۰ باشد. با توجه به علامت مثبت ۱، تنها جواب با سه علامت منفی {۵,۳,۲} است. با دو علامت منفی جواب‌ها {۲,۸}، {۳,۷} و {۴,۶} هستند و با یک علامت منفی تنها جواب {۱۰} است. در نتیجه در کل ۵ راه وجود دارد.

۳۲۳. چند مثلث در شکل ۲ وجود دارد؟

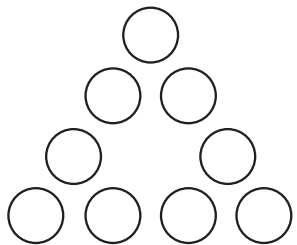


شکل ۲

اگر هر مثلث کوچک را مثلثی واحد در نظر بگیریم، ۱۶ مثلث واحد وجود دارد. همچنین ۱۶ مثلث با مساحت دو برابر، ۸ مثلث با مساحت چهار برابر و ۴ مثلث با مساحت هشت برابر وجود دارد. در نتیجه تعداد کل مثلث‌ها برابر است با ۴۴.

۳۲۴. عددهای ۱ تا ۹ را درون دایره‌ها (شکل ۳).

طوری نوشته‌ایم که مجموع اعداد هر ضلع برابر ۱۷ شود. مجموع اعداد روی رأس‌ها را بیابید. چند روش برای نوشتن ۹ عدد وجود دارد؟



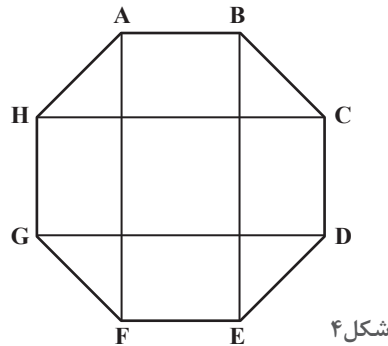
شکل ۳

مجموع همه خانه‌ها برابر است با ۴۵ و مجموع سه ضلع برابر است با ۵۱. اما در مجموع سه ضلع، رئوس را ۲ بار شمرده‌ایم. پس مجموع اعداد سه رأس برابر است با ۶. برای نوشتن سه رأس، $۳! = ۶$ حالت وجود دارد. سپس اعداد ۴ تا ۹ را باید در ۶ خانه باقی‌مانده طوری بنویسیم که مجموع هر ضلع ۱۷ شود. اگر ۹ را با ۴ جفت کنیم، آن‌گاه باید ۸ را با ۶ و ۷ را با ۵ در نظر بگیریم و ۳ حالت برای نوشتن سه جفت روی اضلاع امکان وجود دارد. اگر ۹ را با ۵ جفت کنیم، آن‌گاه باید ۸ را با ۴ و ۷ را با ۶ در نظر بگیریم،

که در اینجا نیز $۲^۳$ حالت برای نوشتن آن‌ها وجود دارد. بنابراین در کل $۹۶ = ۶(۸+۸)$ راه برای نوشتن ۹ رقم وجود دارد.

۲۲۵. در شکل ۴ چه کسری از هشت‌ضلعی منتظم رنگ شده است؟

اگر ضلع هشت‌ضلعی را واحد در نظر بگیریم، مساحت رنگ شده نصف مساحت مستطیل ABEF است. از طرف دیگر، مساحت ABEF برابر ۳ و مساحت هشت‌ضلعی برابر ۷ است. در نتیجه نسبت مساحت رنگی به کل مساحت برابر است با: $\frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۷} = \frac{۳}{۱۴}$.



شکل ۴

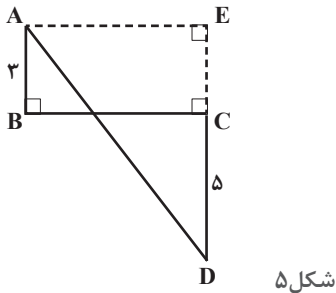
۲۲۶. یک ظرف شیشه‌ای پر از عسل ۷۵° گرم وزن دارد. اگر یک سوم عسل را خالی کنیم، وزن ظرف به ۵۵° گرم می‌رسد. وزن ظرف خالی چقدر است؟
وزن یک سوم عسل برابر $۷۵ - ۵۵ = ۲۰$ گرم است. پس وزن عسل برابر ۶۰° گرم و وزن ظرف برابر ۱۵° گرم است.

۲۲۷. دو عدد طبیعی هستیم که حاصل ضربمان برابر ۱۰۰۰ است، اما هیچ کدام سمت راست خود رقم صفر نداریم. ما چه عددی هستیم؟

چون رقم یکان ما صفر نیست، پس به ده بخش پذیر نیستیم. بنابراین یکی از ما فقط عامل اول ۵ و دیگری فقط عامل اول ۲ را داریم. پس ما دو عدد $۲^۳$ و $۵^۳$ هستیم.

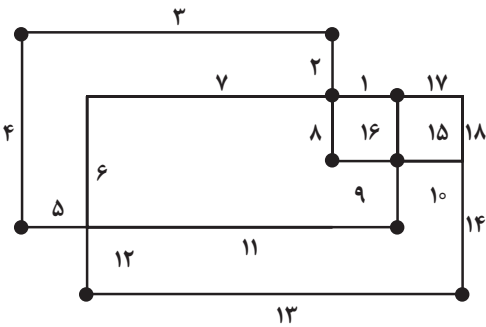
۲۲۸. در شکل ۵، $BC=۶$. اندازه AD را به دست آورید.

با توجه به شکل ۵، AE و DE به ترتیب برابر ۶ و ۸ خواهند بود. در نتیجه طبق قضیه فیثاغورس AD برابر است با: $\sqrt{۸^۲ + ۶^۲} = ۱۰$.



شکل ۵

۲۲۹. آیا می‌توان شکل ۶ را با یک حرکت خودکار رسم کرد؟ در واقع مجاز نیستیم خودکار را از روی کاغذ برداریم تا زمانی که شکل کامل شود.
مطابق شکل ۶ پاره‌خطها را طبق شماره طی می‌کنیم.



شکل ۶

۲۳۰. اگر x عددی حقیقی باشد، کمترین مقدار عبارت زیر را به دست آورید:

$$y = |||x-۱۰|+۱۰|-۱۰|+۱۰|$$

اگر بخواهیم y مینی‌م شود، باید $||x-۱۰|+۱۰|-۱۰|$ برابر صفر باشد. در نتیجه $||x-۱۰|+۱۰|$ باید برابر ۱۰ شود. یعنی $|x-۱۰|$ باید صفر باشد. پس $x=۱۰$ و کمترین مقدار y برابر ۱۰ است.